Mathe-AG 9/10

Wettbewerbsaufgaben

Es wird schwierig sein, alle fünf Aufgaben zu lösen. Lies sie dir durch und fang mit der an, die dich am ehesten anspricht. Die ersten vier Aufgaben sind alle vom Bundeswettbewerb Mathematik 2002.

Aufgabe 1.

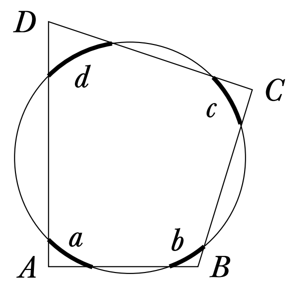
Auf dem Planeten Ypsilon besteht das Jahr—wie bei uns—aus 365 Tagen. Auch dort gibt es nur Monate mit 28, 30 oder 31 Tagen. Beweise, dass auf Ypsilon das Jahr ebenfalls 12 Monate haben muss.

Aufgabe 2.

Die Loszettel einer gewissen Lotterie enthalten sämtliche neunstelligen Zahlen, die mit den Ziffern 1, 2, 3 gebildet werden können; dabei steht auf jedem Loszettel genau eine Zahl. Es gibt nur rote, gelbe und blaue Loszettel. Zwei Losnummern, die sich an allen neun Stellen unterscheiden, stehen stets auf Zetteln verschiedener Farbe. Jemand zieht ein rotes Los und ein gelbes Los; das rote Los hat die Nummer 122 222 222, das gelbe Los hat die Nummer 222 222 222.

Welche Farbe hat das Los mit der Nummer 123 123 123?

Aufgabe 3.



Die Seiten eines konvexen Vierecks zerlegen einen Kreis in acht Teilbögen, von denen vier innerhalb und vier außerhalb des Vierecks liegen (siehe Skizze). Die Längen der inneren Bögen seien gegen den Uhrzeigersinn mit a, b, c, d bezeichnet; es gelte $a + c = b + d$. Beweise, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Tipp: Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die gegenüberliegenden Winkel zusammen $180°$ *ergeben.*

Aufgabe 4.

Aus zwölf Strecken der Länge 1, 2, . . ., 12 wird irgendwie ein Zwölfeck zusammengesetzt. Beweise, dass es in diesem Zwölfeck dann stets drei aufeinanderfolgende Seiten gibt, deren Gesamtlänge größer als 20 ist.

Aufgabe 5.

Für zwei positive, *irrationale* Zahlen a und b gelte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Zeige, dass die beiden Folgen $\lfloor 1a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \ldots$ und $\lfloor 1b \rfloor, \lfloor 2b \rfloor, \lfloor 3b \rfloor, \ldots$ zusammen alle natürlichen Zahlen genau einmal enthalten.

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ *bezeichent die größte ganze Zahl kleiner gleich* x*, also zum Beispiel* $\lfloor \pi \rfloor = 3$.