Mathe-AG 9/10

Eulerscher Polyedersatz

Eulerscher Polyedersatz.

Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph, und seien V die Anzahl der Ecken, E die Anzahl der Kanten und F die der Flächen. Dann gilt $V - E + F = 2$.

Beweis 1: Induktion über Flächen.

1. Wie sieht ein zusammenhängender, planarer Graph aus, der nur eine einzige Fläche hat? Warum muss für so einen Graphen auf jeden Fall $V - E + F = 2$ gelten?

2. Angenommen, ein Graph hat mehrere Flächen. Entferne eine Kante zwischen zwei nebeneinanderliegenden Flächen. Was passiert mit V, E und F? Warum gilt der Eulersche Polyedersatz?

Beweis 2: Induktion über Kanten.

1. Wie sieht ein zusammenhängender, planarer Graph ohne Kanten aus? Zeige, dass $V - E + F = 2$ gilt.

2. Füge nun schrittweise Kanten hinzu: Entweder die Kante wird zwischen zwei existierenden Ecken eingefügt, oder sie wird zwischen einer existierenden und einer neuen Ecke eingefügt. Wie ändern sich V, E und F jeweils?

Beweis 3: Ineinandergreifende Bäume.

1. Betrachte G und seinen dualen Graphen G^*. Wähle einen *Spannbaum* T von G; das ist ein Teilgraph von G, der ein Baum ist und der alle Knoten von G enthält. (Warum gibt es immer einen Spannbaum?)

2. Streiche aus G^* alle Kanten, die von T gekreuzt werden, und erhalte einen Teilgraphen S. Was für ein Graph ist S? Warum?

3. Wie viele Ecken haben T und S jeweils, abhängig von V, E und/oder F? Wie viele Kanten haben sie dementsprechend?

4. Zeige, dass T und S zusammen E Kanten haben müssen, und setze E mit der Summe der Werte aus (3) gleich.

Mathe-AG 9/10

Eulerscher Polyedersatz

Beweis 4: Eulerkreis.

1. Nimm zunächst an, dass G einen Eulerkreis hat. Wir starten an einem Punkt des Eulerkreises und gehen den Eulerkreis einmal entlang. Sei W die Anzahl der Male, die wir dabei an einer Ecke vorbeikommen, an der wir schonmal vorbeigekommen sind. Zeige $W = F - 1$. (Stell dir vor, du würdest den Graph zeichnen, indem du nach und nach den Eulerkreis zeichnest. Wann entstehen dabei neue Flächen?)

2. Wie lang ist der Eulerkreis insgesamt? Zeige $W = E - V + 1$. Wenn G einen Eulerkreis hat, haben wir den Polyedersatz also bewiesen. (Warum?)

3. Falls G keinen Eulerkreis hat, ersetze jede Kante durch zwei parallele Kanten, die sehr eng nebeneinander verlaufen, sodass der entstehende Graph immer noch planar ist. Zeige, dass der neue Graph einen Eulerkreis enthält, sodass der Polyedersatz für ihn gelten muss. Warum muss er dann auch im originalen Graphen gelten?

Beweis 5: Winkelargument.

Nimm für diesen Beweis an, dass man G so zeichnen kann, dass alle Kanten gerade sind, und außerdem, dass es keine „losen Enden" gibt, also alle Kanten zwischen zwei *verschiedenen* Flächen liegen.

1. Wie groß ist die Innenwinkelsumme in einem n-Eck? Wie groß ist die Außenwinkelsumme? (Was sind Außenwinkel?)

2. Betrachte die *Innenwinkel* von allen F Flächen. Zeige, dass sie alle zusammen $2E$ Eckpunkte haben (wobei Ecken mehrfach gezählt werden). Zeige, dass also alle ihre Innenwinkel zusammenaddiert $180 \cdot (2E - 2F)$ Grad ergeben.

3. Teile die Ecken von G in die auf, die im Inneren der äußersten Umrandung liegen und die, die auf der äußersten Umrandung liegen. Wie viel trägt jeder Punkt im Inneren zur Gesamt-Innenwinkelsumme bei? Zeige, dass jeder Punkt auf dem Rand $2 \cdot (180 - \alpha_i)$ Grad beiträgt, wobei α_i der Außenwinkel am Punkt ist.

4. Was ist die Summe aller Winkel aus (3)? (Benutze die Summe aller Außenwinkel aus (1).) Setze die beiden Ergebnisse für die Gesamt-Innenwinkelsumme gleich.